

# Bevezetés a Formális Logikába

Érveléstechnika-logika 7.

Elemi és összetett állítások

# Elemi állítások

- **Állítás: Jelentéssel bíró kijelentő mondat, amely információt közöl a világról. Az állítás vagy igaz vagy hamis, és nem lehet egyszerre igaz és hamis.**
- Vannak olyan állítások, amelyek már tovább nem bontható információt tartalmaznak. [S est P] Ezek az **elemi állítások**.
- Vagy igazak, vagy hamisak.
- Az elemi állítás nem tartalmaz egy további, önmagában is igaz vagy hamis állítást.
- Példák: *A szobában két ablak van. Esik az eső. A magyar futball helyzete sajnos egyre rosszabb. Szeretem a vízilovakat. A magyarok a Szíriusról jöttek.*
- Az elemi állításokat az abc kisbetűivel jelöljük: p, q, r...

# Összetett állítások

Az **összetett állítások** több **elemi állításból** állnak össze.

Az állítások különböző logikai viszonyban lehetnek egymással. Az állításokat **logikai műveletek** kapcsolják össze.

Példák: *Befejezte a munkát, és hazament.*

1. elemi állítás: *Befejezte a munkát.*

2. elemi állítás: *Hazament.*

**A két állítást az 'és' logikai kifejezés kapcsolja össze.**

*Vagy jegyzetelek órán, vagy felveszem diktafonra.*

1. elemi állítás: *Jegyzetelek órán.*

2. elemi állítás: *Felveszem az órát diktafonra.*

**A két állítás között a 'vagy' logikai művelet teremt kapcsolatot.**

# Összefoglalás

Az *elemi állításokat* **logikai műveletekkel** kapcsolhatjuk össze, így *összetett állítást* kapunk.

Az összetett állítás igazságértékét (igaz vagy hamis volta) a *részeinek igazságértéke*, és az állítások közti *logikai kapcsolat* határozza meg.

A logikai műveleteket (és, vagy, nem, ha-akkor) tekinthetjük ***függvénynek*** is, amely a **bemenetek** (elemi állítások) **igazságértékéhez hozzárendeli a kimenet** (összetett állítás) **igazságértékét**.

Az **igazságtáblázat** megadja, hogy az elemi állítás(ok) lehetséges igazságértékei esetén mi lesz az összetett állítás igazságértéke.

# Többértelmű összetett állítások

Vannak olyan esetek, amikor az összetett állítást kifejező mondat *többféleképpen* értelmezhető. Nem mindegy, hogyan *tagoljuk* részekre az eredeti mondatot.

Nem egyértelmű, mi az értelme az **összetett állításnak**, vagyis nem egyértelmű, hogy az **elemi állítások** hogyan kapcsolódnak össze egymással.

A logikai elemzés szükséges ahhoz, hogy felismerjük és elkülönítsük a *különböző értelmezési lehetőségeket*.

# Kijelentéslogika

# Kijelentéslogikai alapfogalmak

- Egy deduktív következtetés **érvényességet** két dolog határozza meg: a következtetésben szereplő **logikai műveletek**, és az **állítások szerkezete**.
- Ahhoz, hogy eldöntsük, jó-e egy adott következtetés, tudnunk kell melyek a **logikai műveletek**, vagyis a következtetésben szereplő állítások milyen módon kapcsolódnak össze.
- **Logikai műveletek:** „nem”, „és”, „vagy”, „ha-akkor”, „akkor és csak akkor, ha”.
- **Kijelentéslogika:** a következtetéseket **elemi állításokra** bontva vizsgálja



**Logikai forma** = mondatok + logikai kötőszavak

**Logikai kötőszavak:** negáció (nem), konjunkció (és), alternáció (vagy), kondicionális (ha, akkor), bikondicionális (akkor és csak akkor, ha)

A logikai kötőszavak **igazságfüggvények**: a velük képzett összetett mondatok igazságértéke az egyszerű mondatok függvénye.

- a logikai kötőszavak jelentését az **igazságtáblázat** rögzíti.
- a logika kötőszavak jelentése és használata nem egyezik tökéletesen természetes nyelvi megfelelőikkel!

Az **érvényesség** (a premisszák igazsága esetén a konklúzió nem lehet hamis) itt azt a formát ölti, hogy **az atomi mondatok igazságértékeinek minden olyan kombinációja, mely az összes premisszát igazzá teszi, igazzá teszi a konklúziót is.**

Az érvényességet igazságtáblázattal ellenőrizhetjük.

# Logikai Műveletek

Negáció, alternáció, konjunkció

# Negáció

- Nemcsak két vagy több állítást összekapcsoló logikai szavak vannak.
- A „**nem igaz, hogy**” az utána következő állítást tagadja. Ha igaz állítást tagadok, az eredmény hamis lesz, ha hamis állítást, az eredmény igaz.
- Pl. *Béla nő*s. Tagadása: *Nem igaz, hogy Béla nő*s. (Béla nem nős.)
- *A kínaiak nyerték a legtöbb aranyérmet a pekingi olimpián*. Tagadása: *Nem a kínaiak nyerték a legtöbb aranyérmet a pekingi olimpián*.
- Ezt **negációnak** nevezzük. A negáció az állítás igazságértékét az ellenkezőjére változtatja. Ha az eredeti állítás igaz volt, a negáció hamis lesz, és fordítva.
- Jele :  $\neg$
- Egy állítás negációja:  $\neg p$

# Negáció

p	$\sim p$
I	H
H	I

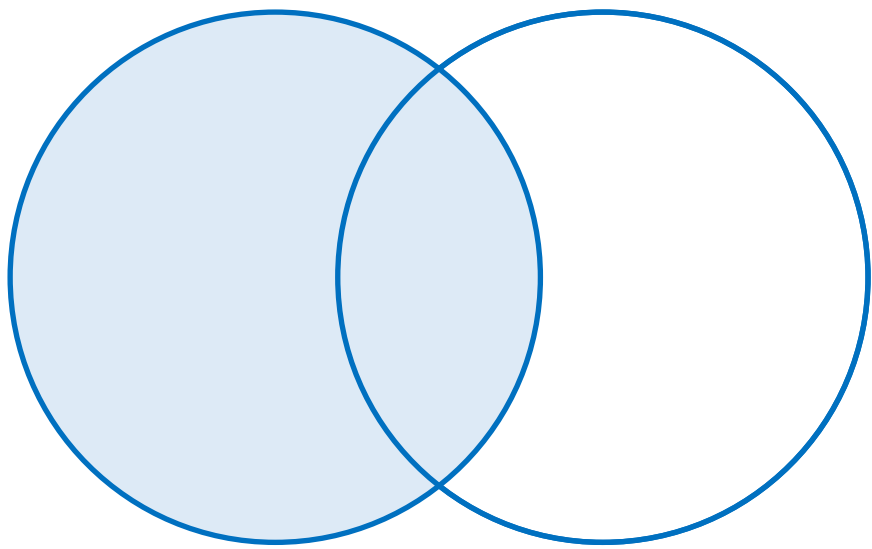
Természetes nyelven: nem; nem igaz, hogy; hamis, hogy; hazugság, hogy; lehetetlen stb.

Következtetés vele: kettős tagadás kiküszöbölése

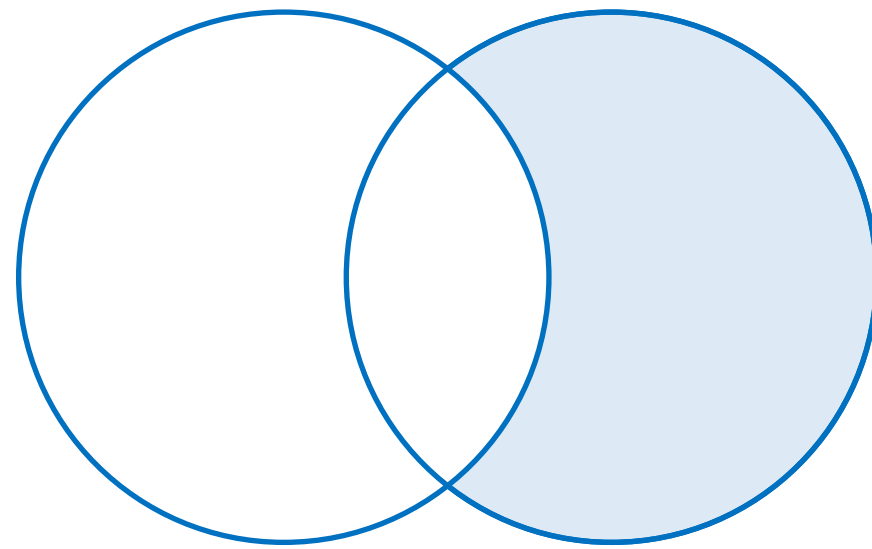
Nem igaz, hogy Lajos nem lüke.  
Lajos lüke.

$\sim\sim p$   
p

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
I	H	I
H	I	H
konklúzió		premissza



$p$



$\neg p$

# Negáció: igaz->hamis, hamis->igaz

1. A javaslatot az ellenzék buktatta meg.
2. A javaslatot nem az ellenzék buktatta meg.
3. Nem igaz, hogy a javaslatot az ellenzék buktatta meg.

Mi az 1. állítás negációja?

Világos, hogy az 1. és 2. nem lehet egyszerre igaz. De a 2. nem negációja az 1.-nek, hiszen lehet mind a kettő hamis. Lehet, hogy senki nem buktatta meg a javaslatot, se az ellenzék, se más. Vagyis az 1. hamissága esetén nem biztos, hogy igaz a 2.

A 2.-t úgy értjük, hogy javaslatot megbuktatták, de erről nem az ellenzék tehet.

**Az 1. negációja logikai értelemben a 3. állítás: *Nem igaz, hogy a javaslatot az ellenzék buktatta meg.***

# Kettős negáció

1. ***Nem igaz, hogy tévedés volna, hogy a logika szórakoztató.*** = A logika szórakoztató.

2. ***Tagadom, hogy nem értek egyet a halálbüntetés támogatóival.*** = Támogatom a halálbüntetést.

3. ***Nem igaz, hogy tévedés volna, hogy nem javult meg a busz.*** = Nem javult meg a busz.

A kettő tagadás 'nem igaz, hogy nem' mindig elhagyható.

Ha egy állításban *páros* számú tagadás van, akkor ezeket mind elhagyhatjuk, és az eredeti állítást kapjuk (1. és 2.)

*Páratlan* számú tagadás pedig egyszerűsíthető az eredeti állítás negációjára. (3.)

# Logikai ekvivalencia

Két **állítás séma (logikai formula)** akkor **ekvivalens**, ha a sémák bármely behelyettesítésével mindig **azonos igazságértékű** állításokat kapunk.

$\neg \neg p$  *logikailag ekvivalens*  $p$ -vel. Ez azt jelenti, hogy  $p$  helyébe bármely állítást behelyettesíthetünk, akkor két állítás igazságértéke azonos lesz: vagy egyszerre igazak, vagy egyszerre hamisak.

(1) „Nem igaz, hogy Péter nem dolgozik” **ekvivalens** azzal, hogy (2) „Péter dolgozik”.

*Ha (1) igaz, akkor (2) is igaz, és fordítva.*

*Ha (1) hamis, akkor (2) is hamis, és fordítva.*



Jele:  $\equiv$

Példa:  $\neg \neg \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}$

A logikai ekvivalencia nem *logikai művelet* (nem úgy mint az 'és', 'vagy', 'nem').

Nem arra szolgál, hogy elemi állításokból összetett állítást képezzen.

A logikai ekvivalencia *logikai törvény* kifejezésére szolgál.

Két állítás (állítás séma) közti összefüggést fejez ki, és a két tag lehet külön-külön összetett állítás is.

# Konjunkció

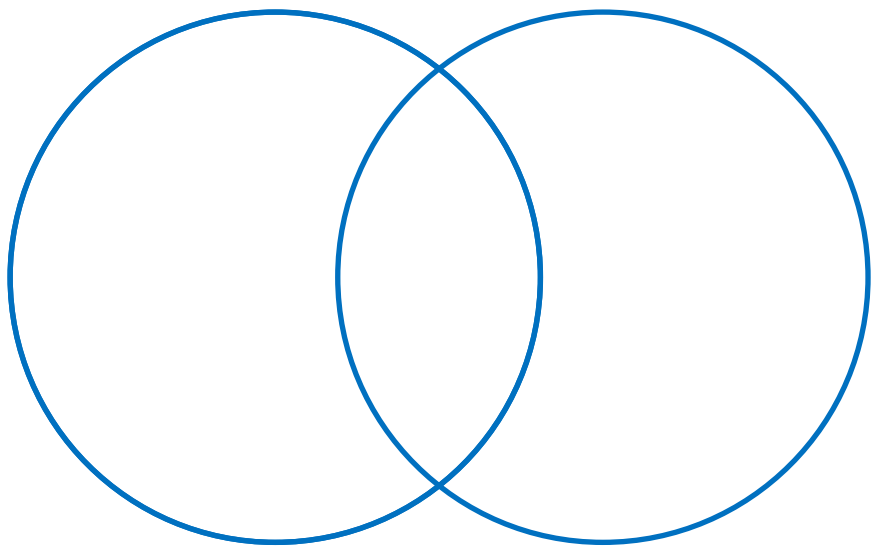
*Kinyitottam az ajtót, és felkapcsoltam a villanyt.*

Mi az, amit állítok? Két dolgot: „*Kinyitottam az ajtót*”,  
„*Felkapcsoltam a villanyt*”

És mikor mondtam igazat? Ha igaz az, hogy kinyitottam az ajtót, és az is igaz, hogy felkapcsoltam a villanyt.

Az 'és'-el azt fejezem ki, hogy az összetett állítás **mind a két tagja igaz**.  
Együttesen állítok két ténnyt.

Ez az **összetett állítás** akkor igaz, ha mind a két része, mind a két elemi állítás **egyszerre igaz**. Ha **valamelyik nem áll fenn** a kettő közül, akkor a **teljes állítás hamis**.



Az 'és' **logikai művelet** tehát két (vagy több) *elemi* állításból egy új, *összetett* állítást hoz létre, amely szintén lehet vagy igaz vagy hamis.

Az ilyen típusú összetett állítások neve: **konjunkció**. Ez szó magyarul összekapcsolást, összekötést jelent. A **konjunkció** két (vagy több) elemi állítás együttes állítása.

Jele a logikában:  $\wedge$

Két elemi állítás konjunkciója:  $p \wedge q$

# Konjunkció felismerése

Nehezíti a konjunkció felismerését, hogy nyelvtanilag nem mindig összetett mondattal fogalmazzuk meg.

Ahol nincs „és”, ott is lehet konjunkció!

**Pl. Norvégia szeles, hideg ország.**

Ez két önálló állítás konjunkciójaként átfogalmazható:

1. *Norvégia szeles ország.* 2. *Norvégia hideg ország.*

Nem minden „és”-t tartalmazó mondat fejez ki konjunkciót.

**És mégis mozog a Föld.**

# Konjunkció nyelvi változatai

A mindennapi nyelvben a konjunkciót nem mindig az „és” szóval adjuk vissza. Az „és”-en kívül használjuk még: *noha, bár, habár, de, pedig, mégis, míg, ugyanakkor, stb.*

**Jó film lesz a tv-ben, de mégis lefekszem aludni.**

**Géza elindult a futóversenyen, pedig influenzás volt.**

**Megcsinálta a munkát, noha szívből utálta.**

Mindegyik esetben annyit állítok, hogy két tény egyszerre fennáll. *Az összetett állítás akkor igaz, ha mind a két állítás egyszerre igaz.*

Logikailag nézve ez a konjunkció. **Abból a szempontból, hogy mikor igaz az összetett állítás, nincs különbség a 'pedig', 'de', 'és' között.**

Persze picit mást jelent a 'mégis', mint az 'és'. De itt most *csak azt vizsgáljuk*, mikor tekinthetjük igaznak az összetett állítást.

# Alternáció

Két (vagy több) állítás lehet vagylagos kapcsolatban is.

*Vagy jegyzetek a mai órán, vagy felveszem diktafonra.*

Az alábbi két állításról van szó:

1. *Jegyzetek a mai órán.* 2. *Felveszem diktafonra a mai órát.*

A vagylagos állítás, akkor **igaz**, ha **legalább az egyik elemi állítás igaz**, ha legalább az egyik tény bekövetkezik a kettő közül. (Az is lehet, hogy mind a kettő.) Akkor **hamis**, ha **mindegyik tagja hamis**, ha egyik tény sem áll fenn.

Az ilyen típusú összetett állítás neve: **alternáció**. Ez két (vagy több) alternatíva közül legalább az egyik bekövetkezését állítja.

**Jele a logikában:  $\vee$**

$p \vee q$

# Alternáció

p	q	$p \vee q$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

Természetes nyelven: vagy

Következtetés vele: diszjunktív szillogizmus, addíció

diszj.  
szill.

Olvasok vagy tévézek.  
Nem olvasok.  
Tévézek.

$p \vee q$   
 $\sim p$   
q

	pr	konk	pr
p	$\sim p$	q	$p \vee q$
I	H	I	I
I	H	H	I
H	I	I	I
H	I	H	H
pr			konk

add.

Olvasok.  
Olvasok vagy tévézek.

p  
 $p \vee q$



Pénzt	Életet	Pénzt vagy életet!
I	I	H
I	H	I
H	I	I
H	H	H

**Más „vagy”-ok**  
 Kizáró vagy: a természetes nyelvben gyakoribb az alternációnál, a „vagy-vagy” tipikusan ezt jelenti

p	q	p v q
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

Iszol	Vezetsz	Iszol vagy vezetsz
I	I	H
I	H	I
H	I	I
H	H	I

összeférhetetlenségi vagy: ritka, a „vagy-vagy” néha ezt jelenti

Haladó kérdés: érvényes-e a diszjunktív szillogizmus és az addíció a „vagy” kizáró illetve összeférhetetlenségi változatával?

# Kizáró vagy

A „vagy” szónak logikailag a mindennapi nyelvben többféle jelentése van. Az alternáción túl létezik egy erősebb, kizáró jelentés is.

*A kurzus oktatója vagy férfi vagy nő.*

*Vagy elmegyünk a ma este moziba vagy nem.*

Itt a 'vagy' **kizáró** értelemben szerepel. Ez azt jelenti, hogy a két összekapcsolt állítás közül **valamelyik** igaz, de **nem lehet egyszerre mind a kettő igaz.**

**A kizáró vagy jele:**  $\nabla$

$p \nabla q$

# Megengedő és kizáró vagy

- 1) Az **alternáció (megengedő vagy)** megengedi, hogy mind a két tagmondat igaz legyen. Az összetett állítás akkor igaz, ha **legalább az egyik elemi állítás igaz** (lehet mind a kettő is). Csak azt zárja ki, hogy egyik sem igaz.

*Esik az eső vagy fúj a szél.*

- 2) A **kizáró vagy** esetében nem lehet mind a két állítás igaz, csak az egyik. A teljes állítás akkor igaz, ha **az egyik állítás igaz, de nem mind a kettő**. Hamis állítás akkor is, ha mind a két elemi állítás **egyszerre igaz**, de akkor is ha **mindkettő hamis**.

*Norbert vagy megnősül vagy agglegény marad.*

Valamelyik biztosan bekövetkezik, de csakis az egyik. Egyszerre nem lehet valaki agglegény és nő is.

***Egyedül megyek a gólyabálba, vagy a párommal, és kellemes estém lesz.***

Mit állít a mondat? Mikor lesz kellemes estém?

**1. [Egyedül megyek a gólyabálba] VAGY [A párommal megyek ÉS Kellemes estém lesz].**

**2. [Egyedül megyek a gólyabálba VAGY A párommal megyek] ÉS [Kellemes estém lesz].**

A 2. azt állítja mindenképp kellemes estém lesz akár egyedül, akár a párommal megyek.

Az 1. szerint viszont a kellemes estém akkor lesz, ha a párommal megyek.

Lovagok és lókötők

# Lovagok és lókötők

Lovagok és lókötők szigetén minden lakó vagy lovag vagy lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.

1. *Lovagok és lókötők szigetén két emberrel, Aladárral és Benedekkel találkozunk. Kérdésünkre Aladár ezt mondja:*

*„Legalább az egyikünk lókötő.” Miféle Aladár és Benedek?*

2. *Lovagok és lókötők szigetén Endrével és Ferencsel találkozunk. Endre azt mondja: „Én lókötő vagyok, de Ferenc nem az.” Miféle Endre és Ferenc?*

3. *Lovagok lókötők szigetén Cecillel és Dénessel találkozunk. Cecil a következő állítást teszi.*

*„Lókötő vagyok, vagy Dénes lovag.” Miféle Cecil és Dénes?*

De Morgan azonosságok

# Összetett konjunkció negációja

**Meteorológus a TV-ben: “Budapesten esni fog az eső és éjszaka fagypont alá süllyed a hőmérséklet.”**

Mikor téved a meteorológus? Hogyan fogalmazzunk meg ennek az összetett állításnak a *negációját*?

Ez egy *konjunkció*. Csak akkor igaz, ha mindkét elemi állítás igaz. Akkor hamis, ha már az egyik elemi állítás hamis.

*Akár nem esik eső, akár nem süllyed fagypont alá a hőmérséklet, az eredeti állítás hamis.*

**Negáció: Vagy az nem igaz, hogy Budapesten esni fog az eső, vagy az nem igaz, hogy Budapesten fagypont alá süllyed a hőmérséklet (esetleg egyik sem igaz).**



A *konjunkció* (együttes állítás) *negációja* (tagadása) kifejezhető úgy, hogy a két tagot *külön-külön* tagadjuk, és *alternációba* (vagylagos viszonyba) kapcsoljuk.

Logikai jelekkel:

$\mathbf{p \wedge q}$

negációja:  $\neg (\mathbf{p \wedge q})$  *Nem igaz, hogy: p és q.*

Ezt kifejezhetjük alternációval is.

$\neg(\mathbf{p \wedge q}) \Leftrightarrow \neg\mathbf{p \vee \neg q}$  *Vagy nem p, vagy nem q.*

# Összetett alternáció negációja

- **Az OTP-nél dolgozol, vagy átmentél az Erstéhez?**
- **Egyik sem.**

Az „Egyik sem” az egész alternációt tagadja. *Vagy az OTP-nél dolgozom, vagy az Ersténél.*

**Negációja:** *Sem az OTP-nél nem dolgozom, sem az Ersténél.*

**Vagyis:** *Nem igaz, hogy az OTP-nél dolgozom, ÉS nem igaz, hogy az Ersténél dolgozom.*

# Összetett alternáció negációja

*Vagy az OTP-nél dolgozom, vagy az Ersténél.*

***Negációja:*** *Nem igaz, hogy az OTP-nél dolgozom, ÉS nem igaz, hogy az Ersténél dolgozom.*

Az alternáció negációját kifejezhetjük azzal, hogy a két elemi állítást („Az OTP-nél dolgozom”, „Az Ersténél dolgozom”) külön-külön tagadjuk, és összekapcsoljuk őket „és”-sel.

**Az alternáció negációja azonos az egyes tagok negációjának konjunkciójával.**

Logikai jelekkel:  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

1. Az egész konjunkció negációja ekvivalens a különálló tagok negációiból képzett alternációval:

$$\neg(\mathbf{p \wedge q}) \equiv \neg\mathbf{p \vee \neg q}$$

2. Az egész alternáció negációja ekvivalens a különálló tagok negációiból képzett alternációval:

$$\neg(\mathbf{p \vee q}) \equiv \neg\mathbf{p \wedge \neg q}$$

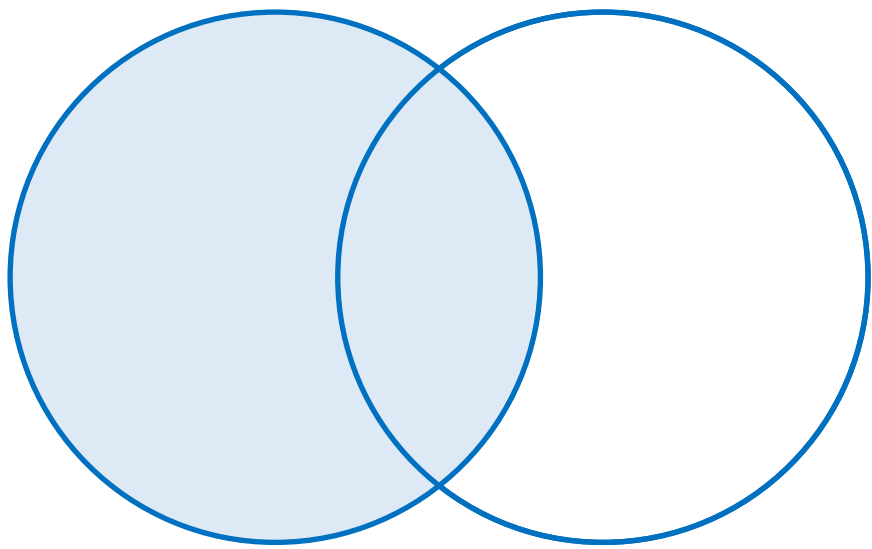
Ezeket **de Morgan-azonosságoknak (de Morgan szabályoknak)** nevezzük.

# Logikai Műveletek

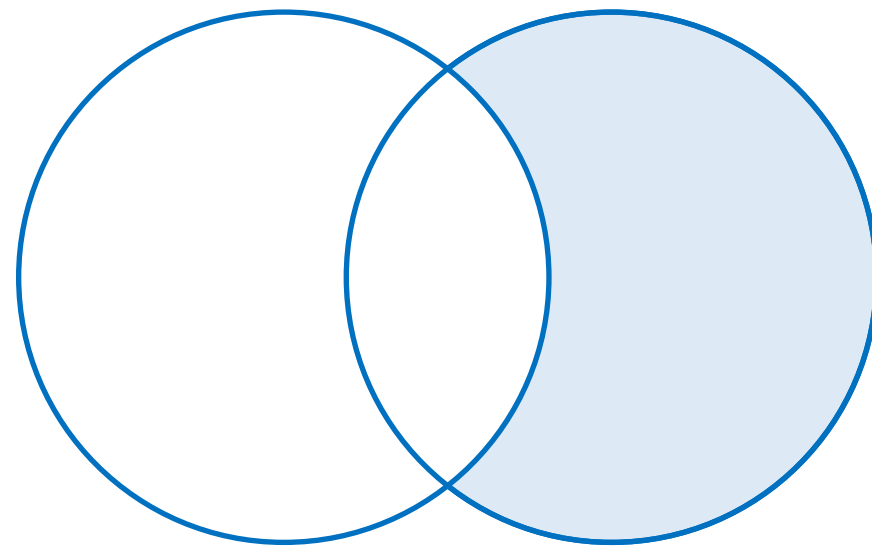
Negáció, alternáció, konjunkció

# Negáció

- Nemcsak két vagy több állítást összekapcsoló logikai szavak vannak.
- A „**nem igaz, hogy**” az utána következő állítást tagadja. Ha igaz állítást tagadok, az eredmény hamis lesz, ha hamis állítást, az eredmény igaz.
- Pl. *Béla nő*. Tagadása: *Nem igaz, hogy Béla nő*. (Béla nem nő.)
- *A kínaiak nyerték a legtöbb aranyérmet a pekingi olimpián*. Tagadása: *Nem a kínaiak nyerték a legtöbb aranyérmet a pekingi olimpián*.
- Ezt **negációnak** nevezzük. A negáció az állítás igazságértékét az ellenkezőjére változtatja. Ha az eredeti állítás igaz volt, a negáció hamis lesz, és fordítva.
- Jele :  $\neg$
- Egy állítás negációja:  $\neg p$



$p$



$\neg p$

# Negáció: igaz->hamis, hamis->igaz

- 1. A javaslatot az ellenzék buktatta meg.**
- 2. A javaslatot nem az ellenzék buktatta meg.**
- 3. Nem igaz, hogy a javaslatot az ellenzék buktatta meg.**

Mi az 1. állítás negációja?

Világos, hogy az 1. és 2. nem lehet egyszerre igaz. De a 2. nem negációja az 1.-nek, hiszen lehet mind a kettő hamis. Lehet, hogy senki nem buktatta meg a javaslatot, se az ellenzék, se más. Vagyis az 1. hamissága esetén nem biztos, hogy igaz a 2.

A 2.-t úgy értjük, hogy javaslatot megbuktatták, de erről nem az ellenzék tehet.

**Az 1. negációja logikai értelemben a 3. állítás: *Nem igaz, hogy a javaslatot az ellenzék buktatta meg.***



# Kettős negáció

1. ***Nem igaz, hogy tévedés volna, hogy a logika szórakoztató.*** = A logika szórakoztató.
2. ***Tagadom, hogy nem értek egyet a halálbüntetés támogatóival.*** = Támogatom a halálbüntetést.
3. ***Nem igaz, hogy tévedés volna, hogy nem javult meg a busz.*** = Nem javult meg a busz.

A kettő tagadás 'nem igaz, hogy nem' mindig elhagyható.

Ha egy állításban *páros* számú tagadás van, akkor ezeket mind elhagyhatjuk, és az eredeti állítást kapjuk (1. és 2.)

*Páratlan* számú tagadás pedig egyszerűsíthető az eredeti állítás negációjára.  
(3.)

# Logikai ekvivalencia

Két **állítás séma (logikai formula)** akkor **ekvivalens**, ha a sémák bármely behelyettesítésével mindig **azonos igazságértékű** állításokat kapunk.

$\neg \neg p$  *logikailag ekvivalens*  $p$ -vel. Ez azt jelenti, hogy  $p$  helyébe bármely állítást behelyettesíthetünk, akkor két állítás igazságértéke azonos lesz: vagy egyszerre igazak, vagy egyszerre hamisak.

(1) „Nem igaz, hogy Péter nem dolgozik” **ekvivalens** azzal, hogy (2) „Péter dolgozik”.

*Ha (1) igaz, akkor (2) is igaz, és fordítva.*

*Ha (1) hamis, akkor (2) is hamis, és fordítva.*

Jele:  $\equiv$

Példa:  $\neg \neg \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}$

A logikai ekvivalencia nem *logikai művelet* (nem úgy mint az 'és', 'vagy', 'nem').

Nem arra szolgál, hogy elemi állításokból összetett állítást képezzen.

A logikai ekvivalencia *logikai törvény* kifejezésére szolgál.

Két állítás (állítás séma) közti összefüggést fejez ki, és a két tag lehet külön-külön összetett állítás is.

# Konjunkció

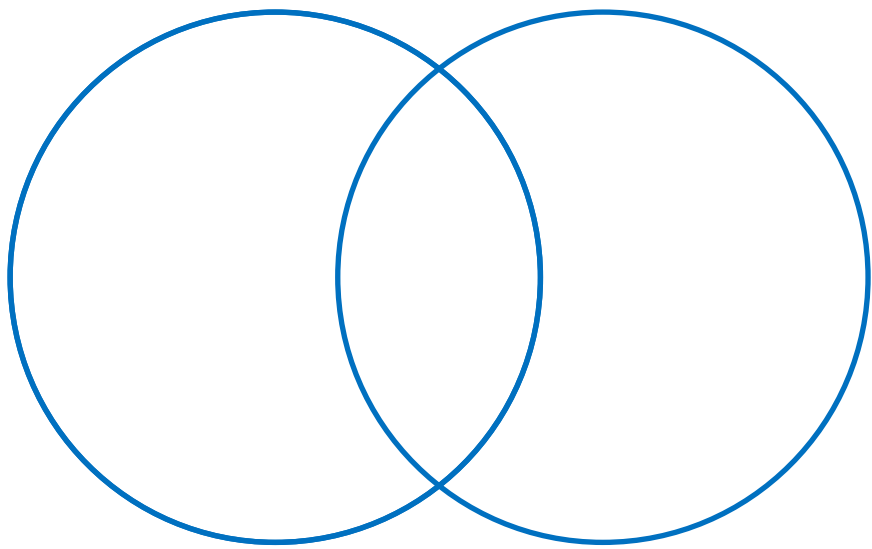
***Kinyitottam az ajtót, és felkapcsoltam a villanyt.***

Mi az, amit állítok? Két dolgot: „*Kinyitottam az ajtót*”,  
„*Felkapcsoltam a villanyt*”

És mikor mondtam igazat? Ha igaz az, hogy kinyitottam az ajtót, és az is igaz, hogy felkapcsoltam a villanyt.

Az 'és'-el azt fejezem ki, hogy az összetett állítás **mind a két tagja igaz**.  
Együttesen állítok két tényt.

Ez az **összetett állítás** akkor igaz, ha mind a két része, mind a két elemi állítás **egyszerre igaz**. Ha **valamelyik nem áll fenn** a kettő közül, akkor a **teljes állítás hamis**.



# Konjunkció

Az 'és' **logikai művelet** tehát két (vagy több) *elemi* állításból egy új, *összetett* állítást hoz létre, amely szintén lehet vagy igaz vagy hamis.

Az ilyen típusú összetett állítások neve: **konjunkció**. Ez szó magyarul összekapcsolást, összekötést jelent. A **konjunkció** két (vagy több) elemi állítás együttes állítása.

Jele a logikában:  $\wedge$

Két elemi állítás konjunkciója:  $p \wedge q$

# Konjunkció felismerése

Nehezíti a konjunkció felismerését, hogy nyelvtanilag nem mindig összetett mondattal fogalmazzuk meg.

Ahol nincs „és”, ott is lehet konjunkció!

**Pl. Norvégia szeles, hideg ország.**

Ez két önálló állítás konjunkciójaként átfogalmazható:

1. *Norvégia szeles ország.* 2. *Norvégia hideg ország.*

Nem minden „és”-t tartalmazó mondat fejez ki konjunkciót.

**És mégis mozog a Föld.**

# Konjunkció

p	q	p & q
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H

Természetes nyelven: és, de, míg, noha, bár, habár, nemcsak ... hanem is, jóllehet, pedig, ugyanakkor, mégis, stb..

Következtetés vele: két mondatból konjunkciójukra (konjunkció), konjunkcióra bármelyik tagjára (egyszerűsítés).

Bea bájos.  
Lajos lüke.  
Bea bájos és Lajos lüke.

p  
q  
p & q

pr	pr	konk
<b>p</b>	<b>q</b>	<b>p &amp; q</b>
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H
konk		pr

Bea bájos és Lajos lüke.  
Bea bájos.

p & q  
p



# Konjunkció nyelvi változatai

A mindennapi nyelvben a konjunkciót nem mindig az „és” szóval adjuk vissza. Az „és”-en kívül használjuk még: *noha, bár, habár, de, pedig, mégis, míg, ugyanakkor, stb.*

**Jó film lesz a tv-ben, de mégis lefekszem aludni.**

**Géza elindult a futóversenyen, pedig influenzás volt.**

**Megcsinálta a munkát, noha szívből utálta.**

Mindegyik esetben annyit állítok, hogy két tény egyszerre fennáll. *Az összetett állítás akkor igaz, ha mind a két állítás egyszerre igaz.*

Logikailag nézve ez a konjunkció. **Abból a szempontból, hogy mikor igaz az összetett állítás, nincs különbség a 'pedig', 'de', 'és' között.**

Persze picit mást jelent a 'mégis', mint az 'és'. De itt most *csak azt vizsgáljuk*, mikor tekinthetjük igaznak az összetett állítást.

# Alternáció

Két (vagy több) állítás lehet vagylagos kapcsolatban is.

*Vagy jegyzetelek a mai órán, vagy felveszem diktafonra.*

Az alábbi két állításról van szó:

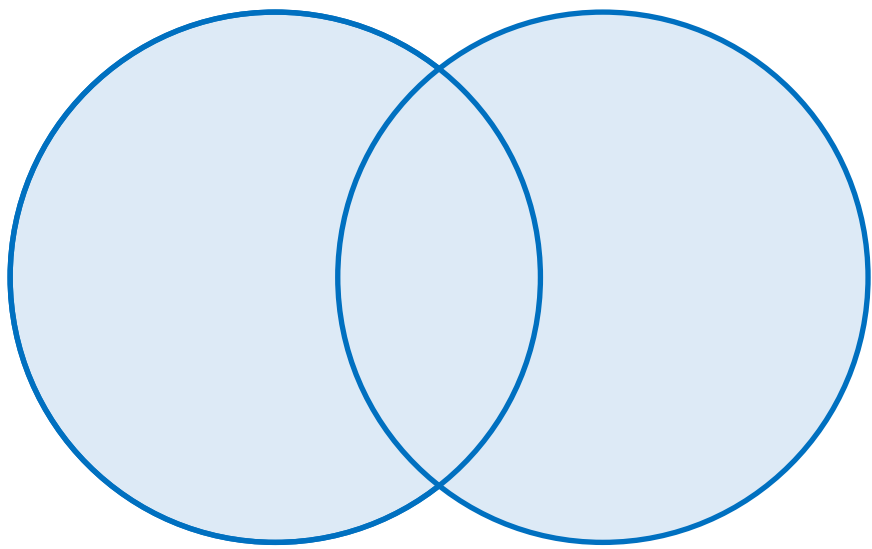
*1. Jegyzetelek a mai órán. 2. Felveszem diktafonra a mai órát.*

A vagylagos állítás, akkor **igaz**, ha **legalább az egyik elemi állítás igaz**, ha legalább az egyik tény bekövetkezik a kettő közül. (Az is lehet, hogy mind a kettő.) Akkor **hamis**, ha **mindegyik tagja hamis**, ha egyik tény sem áll fenn.

Az ilyen típusú összetett állítás neve: **alternáció**. Ez két (vagy több) alternatíva közül legalább az egyik bekövetkezését állítja.

**Jele a logikában:  $\vee$**

$p \vee q$



# Kizáró vagy

A „vagy” szónak logikailag a mindennapi nyelvben többféle jelentése van. Az alternáción túl létezik egy erősebb, kizáró jelentés is.

*A kurzus oktatója vagy férfi vagy nő.*

*Vagy elmegyünk a ma este moziba vagy nem.*

Itt a 'vagy' **kizáró** értelemben szerepel. Ez azt jelenti, hogy a két összekapcsolt állítás közül **valamelyik** igaz, de **nem lehet egyszerre mind a kettő igaz.**

**A kizáró vagy jele:**  $\nabla$

$p \nabla q$

# Megengedő és kizáró vagy

- 1) Az **alternáció (megengedő vagy)** megengedi, hogy mind a két tagmondat igaz legyen. Az összetett állítás akkor igaz, ha **legalább az egyik elemi állítás igaz** (lehet mind a kettő is). Csak azt zárja ki, hogy egyik sem igaz.

*Esik az eső vagy fúj a szél.*

- 2) A **kizáró vagy** esetében nem lehet mind a két állítás igaz, csak az egyik. A teljes állítás akkor igaz, ha **az egyik állítás igaz, de nem mind a kettő**. Hamis állítás akkor is, ha mind a két elemi állítás **egyszerre igaz**, de akkor is ha **mindkettő hamis**.

*Norbert vagy megnősül vagy agglegény marad.*

Valamelyik biztosan bekövetkezik, de csakis az egyik. Egyszerre nem lehet valaki agglegény és nő is.

# Alternáció

p	q	$p \vee q$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

Természetes nyelven: vagy

Következtetés vele: diszjunktív szillogizmus, addíció

diszj.  
szill.

Olvasok vagy tévézek.  
Nem olvasok.  
Tévézek.

$p \vee q$   
 $\sim p$   
q

	pr	konk	pr
p	$\sim p$	q	$p \vee q$
I	H	I	I
I	H	H	I
H	I	I	I
H	I	H	H
pr			konk

add.

Olvasok.  
Olvasok vagy tévézek.

p  
 $p \vee q$

# Összefoglalás

Az *elemi állításokat* **logikai műveletekkel** kapcsolhatjuk össze, így *összetett állítást* kapunk.

Az összetett állítás igazságértékét (igaz vagy hamis volta) a *részeinek igazságértéke*, és az állítások közti *logikai kapcsolat* határozza meg.

A logikai műveleteket (és, vagy, nem, ha-akkor) tekinthetjük ***függvénynek*** is, amely a **bemenetek** (elemi állítások) **igazságértékéhez hozzárendeli a kimenet** (összetett állítás) **igazságértékét**.

Az **igazságtáblázat** megadja, hogy az elemi állítás(ok) lehetséges igazságértékei esetén mi lesz az összetett állítás igazságértéke.

# Többértelmű összetett állítások

Vannak olyan esetek, amikor az összetett állítást kifejező mondat *többféleképpen* értelmezhető. Nem mindegy, hogyan *tagoljuk* részekre az eredeti mondatot.

Nem egyértelmű, mi az értelme az **összetett állításnak**, vagyis nem egyértelmű, hogy az **elemi állítások** hogyan kapcsolódnak össze egymással.

A logikai elemzés szükséges ahhoz, hogy felismerjük és elkülönítsük a *különböző értelmezési lehetőségeket*.



***Egyedül megyek a gólyabálba, vagy a párommal, és kellemes estém lesz.***

Mit állít a mondat? Mikor lesz kellemes estém?

**1. [Egyedül megyek a gólyabálba] VAGY [A párommal megyek ÉS Kellemes estém lesz].**

**2. [Egyedül megyek a gólyabálba VAGY A párommal megyek] ÉS [Kellemes estém lesz].**

A 2. azt állítja mindenképp kellemes estém lesz akár egyedül, akár a párommal megyek.

Az 1. szerint viszont a kellemes estém akkor lesz, ha a párommal megyek.

De Morgan azonosságok

# Összetett konjunkció negációja

**Meteorológus a TV-ben: “Budapesten esni fog az eső és éjszaka fagypont alá süllyed a hőmérséklet.”**

Mikor téved a meteorológus? Hogyan fogalmaznánk meg ennek az összetett állításnak a *negációját*?

Ez egy *konjunkció*. Csak akkor igaz, ha mindkét elemi állítás igaz. Akkor hamis, ha már az egyik elemi állítás hamis.

*Akár nem esik eső, akár nem süllyed fagypont alá a hőmérséklet, az eredeti állítás hamis.*

Negáció: **Vagy az nem igaz, hogy Budapesten esni fog az eső, vagy az nem igaz, hogy Budapesten fagypont alá süllyed a hőmérséklet** (esetleg egyik sem igaz).

A *konjunkció* (együttes állítás) *negációja* (tagadása) kifejezhető úgy, hogy a két tagot *külön-külön* tagadjuk, és *alternációba* (vagylagos viszonyba) kapcsoljuk.

Logikai jelekkel:

$p \wedge q$

negációja:  $\neg (p \wedge q)$  *Nem igaz, hogy: p és q.*

Ezt kifejezhetjük alternációval is.

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$  *Vagy nem p, vagy nem q.*

# Összetett alternáció negációja

- **Az OTP-nél dolgozol, vagy átmentél az Erstéhez?**
- **Egyik sem.**

Az „Egyik sem” az egész alternációt tagadja. *Vagy az OTP-nél dolgozom, vagy az Ersténél.*

**Negációja:** *Sem az OTP-nél nem dolgozom, sem az Ersténél.*

**Vagyis:** *Nem igaz, hogy az OTP-nél dolgozom, ÉS nem igaz, hogy az Ersténél dolgozom.*

# Összetett alternáció negációja

*Vagy az OTP-nél dolgozom, vagy az Ersténél.*

**Negációja:** *Nem igaz, hogy az OTP-nél dolgozom, ÉS nem igaz, hogy az Ersténél dolgozom.*

Az alternáció negációját kifejezhetjük azzal, hogy a két elemi állítást („Az OTP-nél dolgozom”, „Az Ersténél dolgozom”) külön-külön tagadjuk, és összekapcsoljuk őket „és”-sel.

**Az alternáció negációja azonos az egyes tagok negációjának konjunkciójával.**

Logikai jelekkel:  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

1. Az egész konjunkció negációja ekvivalens a különálló tagok negációiból képzett alternációval:

$$\neg(\mathbf{p \wedge q}) \equiv \neg\mathbf{p \vee \neg q}$$

2. Az egész alternáció negációja ekvivalens a különálló tagok negációiból képzett alternációval:

$$\neg(\mathbf{p \vee q}) \equiv \neg\mathbf{p \wedge \neg q}$$

Ezeket **de Morgan-azonosságoknak (de Morgan szabályoknak)** nevezzük.

Lovagok és lókötők



# Lovagok és lókötők

Lovagok és lókötők szigetén minden lakó vagy lovag vagy lókötő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.

1. *Lovagok és lókötők szigetén két emberrel, Aladárral és Benedekkel találkozunk. Kérdésünkre Aladár ezt mondja:*

*„Legalább az egyikünk lókötő.” Miféle Aladár és Benedek?*

2. *Lovagok és lókötők szigetén Endrével és Ferencsel találkozunk. Endre azt mondja: „Én lókötő vagyok, de Ferenc nem az.” Miféle Endre és Ferenc?*

3. *Lovagok lókötők szigetén Cecillel és Dénessel találkozunk. Cecil a következő állítást teszi.*

*„Lókötő vagyok, vagy Dénes lovag.” Miféle Cecil és Dénes?*

*4. Három emberrel találkoztunk. X, Y és Z.*

*Megkérdeztük X-t, hogy ő lovag-e vagy lóköető. Válaszul motyogott valamit, de nem értettük. Ezután megkérdeztük Y-t, hogy mit mondott X. Y erre azt válaszolta: „X azt mondta, hogy ő lóköető.”. Erre hirtelen Z megszólalt: „Ne higgyen Y-nak, hazudik!”*

*Miféle X, Y és Z?*

# Diszjunktív szillogizmus

- **A kastélyhoz balra vagy egyenesen kell menni?**
- **Az út balra nem odavisz, hanem az istállóhoz.**
- **Tehát egyenesen kell menni.**

A következtetés érvényes, a premisszákból következik a konklúzió.

Az első premissza két alternatív esetről beszél (ezek esetleg *egyszerre* is igazak lehetnek).

A második premissza tagadja, „eliminálja” az egyik lehetőséget.

Így marad a második lehetőség, és ez szerepel a konklúzióban.

A következtetés  
sémája:

$p \vee q$

$\neg p$

—————

$q$

**Vagy igaz az, hogy a leggazdagabb emberek a legboldogabbak, vagy nem igaz, hogy pénzen mindent meg lehet venni. Számos példát találhatunk arra, hogy a leggazdagabb emberek nem a legboldogabbak. Így világos, hogy pénzen nem lehet mindent megvenni.**

*B: A leggazdagabb emberek a legboldogabbak.*

*P: Pénzen mindent meg lehet venni. (Negációja szerepel a következtetésben.)*

**b v  $\neg$ p**

**$\neg$  b**

\_\_\_\_\_

**$\neg$ p**

# Érvénytelen diszjunktív szillogizmus

- *Tavaly volt meleg, száraz nyár vagy tavaly előtt?*
- *Tavaly meleg, száraz nyár volt.*
- *Ezek szerint tavalyelőtt hűvös nyarunk volt.*

A következtetés hasonlít az előzőre, de ez **nem érvényes**.

Mivel itt '**megengedő vagy**'-ről (alternációról) van szó, így lehet mindkét

állítás egyszerre igaz. Vagyis az egyik lehetőség igazságából **nem**

**feltétlenül következik** a másik lehetőség hamissága.

Sémája:

$p \vee q$

$p$

—————

$\neg q$